GÖLDEN, ESCHER, BACH UN ETERNO Y GRÁCIL BUCLE

Gölden, Escher, Bach an eternal golden braid

Autor: Juliana Restrepo Benavidez

*Departamento de Ingeniería en Sistemas y Computación, Universidad Tecnológica, Pereira, Colombia*

Correo-e: j.restrepo4@utp.edu.co

***Resumen*— este documento hace referencia a la relación que tiene algunos trabajos en diferentes ámbitos, pero con sistemas o ideologías comunes, que llevan a una misma perspectiva de un sistema relacionado con la búsqueda de la verdad.**

***Palabras clave—*Bucle, interacción, lógica, paradojas, razonamiento, inteligencia artificial, invención, infinito, teorema, música, figura, recursividad, percepción.**

***Abstract*— A new series of pyrrolic compounds was obtained through 1,3-dipolar cycloaddition between α, β-unsaturated ketones and the synthon tosylmethylisocianide (TOSMIC). The starting materials were prepared through the aldol condensation from the respective aldehydes and ketones. The structural elucidation of precursors and the target molecules was performed by conventional spectroscopic techniques as nuclear magnetic resonance (1H-and 13C-NMR) and infrared spectroscopy (IR).**

***Key Word* —** **Loop, interaction, logic, paradoxes, reasoning, artificial intelligence, invention, infinity, theorem, music, figure, recursion, perception.**

1. INTRODUCCIÓN

Douglas Hofstadter es un físico reconvertido a filósofo que en cierto punto de su vida, según él mismo cuenta, se dio cuenta de que los tres autores anteriores hacían alusión desde sus ramas (las matemáticas, los grabados y la música) a una misma idea: la recursividad en la que un sistema intenta analizarse a sí mismo. Una cuestión que, desde su punto de vista, debía de estar muy relacionada con el fenómeno del ser humano pensando acerca de su propia mente y le llevó a escribir esta obra de nada menos que ochocientas páginas y publicarla en 1979.

1. CONTENIDO

GEB se divide en dos partes, aunque las constantes autorreferencias hacen complicado establecer una distinción clara. La primera de ellas, a la cual el autor llama GEB, trata acerca de los fundamentos de los sistemas lógicos formales. La segunda, EGB, se mete de lleno en la cuestión de cómo analizar formalmente la mente humana y hasta dónde se puede explorar esa idea.

En la primera, el autor expone un diálogo entre personajes que sirve de introducción al tema, y en la segunda lo desarrolla ya sin florituras. Personalmente, opino que con honrosas excepciones lo que da más calidad al libro son los diálogos, ya que las exposiciones técnicas son compartidas con bastantes otros autores, en particular cuando habla de los axiomas en matemáticas, de genética o de los fundamentos de la programación.

En los diálogos los dos protagonistas fundamentales son Aquiles y la Tortuga, que protagonizan a su vez la famosa paradoja de Zenon (fuera del libro), una de las primeras en tratar los bucles autorreferenciales infinitos al analizar cómo Aquiles nunca podría alcanzar a la tortuga dado que cuando llegase a su posición, esta estaría en una posición diferente aunque hubiese pasado poco tiempo. En GEB, la Tortuga representa habitualmente el personaje sabio, mientras que Aquiles representa el personaje más bien heurístico y pragmático. Sus conversaciones suelen tener estructuras interesantes relacionadas con el capítulo. Por ejemplo, cuando el tema a tratar es la estrecha relación entre una forma y su forma complementaria, en el diálogo tan solo leemos a Aquiles y, sin embargo, es perfectamente deducible lo que la Tortuga le está contestando aún sin que su parte esté escrita. En otra ocasión, al hablar de acrósticos, el propio diálogo forma uno. Pero quizás el más relevante sea el diálogo “canon Cangrejo”, que se lee igual hacia delante y hacia atrás, y el propio autor comenta lo que le costó desarrollarlo.

Dentro de la parte del libro que no son diálogos, sin embargo, GEB deja de suponer una obra amena con trucos para convertirse en texto expositivo.

Tras los capítulos iniciales, que constituyen toda la primera parte, comienza a hablar de conceptos informáticos, distinguiendo entre los lenguajes máquina de las computadoras y los de nivel superior, describe con detalle la noción de niveles de análisis de un sistema (por ejemplo, tratar la mente como una unidad, como un conjunto de pensamientos, uno de neuronas o uno de átomos) y empieza a hacer analogías entre las neuronas intentando comprender la mente que crean y los números intentando comprender los axiomas de Peano de la aritmética (que es el fundamento del teorema de incompletitud de Gödel).

Gödel demostró que dentro de la teoría aritmética había afirmaciones que era imposible verificar si eran verdaderas o falsas desde la propia teoría, y Hofstadter se adentra entonces en la cuestión de si una extrapolación posible de dicho teorema es que para nuestras neuronas habrá cuestiones acerca de sí mismas que también les serán inabordables, como la naturaleza de la mente. Indica que en su opinión no es el caso, porque la analogía entre el sistema formal de Gödel y la estructura neuronal no es exacta.

Dentro de sus explicaciones de cómo “gödelizar” la comprensión de la mente plantea un ejemplo que he encontrado francamente elegante e ilustrativo, así que voy a parafrasearlo con pinceladas de las ideas profundas que involucra.

el teorema de Gödel se fundamenta en lo siguiente: los números siguen unas reglas que podemos caracterizar con teoremas, y estos teoremas siguen una estructura que podemos analizar con meta-teoremas. Los teoremas, a su vez, son expresables en términos de números, y al aplicar a los teoremas (pensados como números) los mismos métodos que aplicamos como números, podemos observar que habrá enunciados indecidibles, es decir, que no se puede saber si son correctos o no. En particular, Gödel demostró que en el caso de la aritmética la afirmación “esta teoría es consistente consigo misma” es indecidible.

En GEB se “gödeliza” la mente del siguiente modo. Supongamos que tenemos nuestro cerebro, el cual toma decisiones, y que estas decisiones vienen definidas por la estructura cerebral del mismo. Pensemos en la toma de decisiones como un tablero de ajedrez, y en la estructura cerebral como otro tablero diferente. Al jugar en el segundo tablero, cambiamos las reglas del primero. A su vez, un tercer tablero podría cambiar las reglas del segundo y así indefinidamente. Resulta entonces que en el caso de nuestros cerebros, en realidad, todos los tableros serían el mismo. Cuando pensamos algo no solo generamos un pensamiento, sino que además por la física del cerebro modificamos la estructura que ha dado lugar a dicho pensamiento, y a sus meta-estructuras a su vez. En este sentido, la estructura cerebral podría estar tan vinculada a las neuronas como los teoremas de la aritmética lo están a los números a los que se refieren. De modo que, quizás (aunque esto no es ciencia sino metafísica), exista un teorema de incompletitud que haga que un cerebro no pueda dar lugar a una mente que comprenda su propia coherencia.

Quizás lo más espectacular de GEB es cómo Hofstadter va dando forma metafórica a todas estas ideas en los diálogos. Al comienzo del libro, se explica que Bach escribió su “Ofrenda musical” para Federico el Grande. Esta obra estaría compuesta de fugas, que son la manifestación musical más clara de la idea de recursividad. En sus diálogos a lo largo de todo el libro, aparece esta noción de ofrenda musical de una forma muy vinculada al teorema de Gödel.

La Tortuga le explica a Aquiles que hizo a su amigo el Cangrejo una ofrenda musical. El cangrejo es un tercer personaje que aparece en el diálogo que se lee igual hacia delante que del revés, en analogía a su peculiar forma de caminar.  La ofrenda musical de la Tortuga consistía en un disco que, al ser reproducido en el exquisito fonógrafo del Cangrejo, lo haría romperse. En particular, el disco se llamaría “No puedo ser reproducido por el fonógrafo del Cangrejo”. Nótese la paradoja. Si el fonógrafo quiere verificar la veracidad de tal afirmación, debe destruirse a sí mismo en el proceso, con lo que para ese fonógrafo el disco es indecidible. Me parece preciosa la analogía con el teorema de Gödel.

El Cangrejo entonces le dice a la Tortuga que ha adquirido otro fonógrafo que puede reproducir el primer disco, llamémosle A, y entonces la Tortuga le ofrece un disco llamado “No puedo ser reproducido por el fonógrafo B”. Tras analizar con detalle que si el fonógrafo es muy bueno, siempre existirá una frecuencia de resonancia que lo hará romperse, el Cangrejo llega a la conclusión de que solo puede salvarse de la trampa de la Tortuga haciendo que la calidad del fonógrafo sea mala. Si el fonógrafo reproduce con precisión el contenido de los discos, siempre se lo podrá hacer romperse, pero si su calidad es mala, no padecerá este problema. Con esto Hofstadter explica que si un sistema es coherente, entonces padece la incompletitud de Gödel, pero si no lo es no pasa nada. El Cangrejo puede elegir entre tener un fonógrafo excelente que no pueda reproducir su disco asociado, o tener uno malo que no se rompa.

En el diálogo “furmiga”, el personaje Oso Hormiguero explica que una colonia de hormigas, en su conjunto, se comporta como una estructura en cierto sentido pensante, si bien cada hormiga individual carece de consciencia del hormiguero como conjunto. El Oso Hormiguero justifica así afirmaciones como que las hormigas le temen, pero la colonia en sí, a la cual se refiere como “Madame Cologne d’Or Migas”, es su amiga y le invita a comerlas.

El Oso Hormiguero indica que en la colonia existen varios niveles, entre ellos la colonia como un conjunto, las castas de hormigas y cada hormiga individual. Lo que hace cada hormiga individual puede parecer caótico o sinsentido, pero es a nivel de castas y de toda la colonia cuando se aprecia el cuadro completo. Entonces se da este diálogo:

angrejo: (…) Las colonias sobreviven porque su distribución de castas tiene sentido, y ese sentido es un aspecto holístico, invisible en niveles inferiores. Usted pierde poder explicativo si no toma en cuenta ese nivel superior.

Oso Hormiguero: Entiendo su posición, pero creo que usted ve las cosas demasiado estrechamente.

Cangrejo: ¿Cómo es eso?

Oso Hormiguero: Las colonias de hormigas han estado sujetas a los rigores de la evolución por billones de años. Unos pocos mecanismos fueron seleccionados, y la mayoría fueron rechazados. El resultado final fue una serie de mecanismos que hacen que la colonia trabaje así como nosotros la hemos descrito. Si usted pudiera observar el proceso completo en una película (corriendo un billón de veces más rápido que en la vida real, por supuesto) vería la emergencia de diversos mecanismos como respuestas naturales a presiones externas, tal como las burbujas en el agua hirviendo son respuestas naturales a una fuente de calor externa. Supongo que usted no ve “significado” ni “finalidad” en las burbujas de agua hirviendo, ¿o sí?

Cangrejo: No, pero…

Oso Hormiguero: Ahora bien, esa es MI posición. No importa cuán grande sea una burbuja, ella debe su existencia a procesos de nivel molecular, y usted puede olvidarse acerca de cualquier “ley de nivel superior”. Lo mismo vale para las colonias de hormigas y sus equipos. Al mirar las cosas desde la vasta perspectiva de la evolución, puede usted vaciar a la colonia de significado y finalidad. Ellas se convierten en nociones superfluas.

Aquiles: ¿Por qué entonces, doctor Oso Hormiguero, me dijo usted que conversaba con Madame Cologne d’Or Migas? Ahora parece que usted negara absolutamente que ella sea capaz de hablar o pensar.

Oso Hormiguero: No estoy siendo inconsistente, Aquiles. Vea, tengo tanta dificultad como cualquier otro para ver las cosas en una escala de tiempo tan grandioso, de modo que encuentro mucho más fácil cambiar de punto de vista. Cuando procedo así, olvidándome acerca de la evolución y viendo las cosas en el aquí y el ahora, recupero el vocabulario teleológico: el “significado” de la distribución de castas y la “finalidad” de las señales. Esto no solo sucede cuando pienso en colonias de hormigas, sino también cuando pienso acerca de mi propio cerebro y otros cerebros. Sin embargo, con algún esfuerzo, siempre puedo recordar el otro punto de vista si es necesario, y también vaciar de cualquier significado a todos estos sistemas.

Investigar este misterio es una aventura que recorre la matemática, la física, la biología, la psicología y muy especialmente, el lenguaje. **Douglas R. Hofstadter**, joven y ya célebre científico, nos abre la puerta del enigma con la belleza y la alegría creadora de su estilo. Sorprendentes paralelismos ocultos entre los grabados de **Escher** y la música de **Bach**nos remiten a las paradojas clásicas de los antiguos griegos y a un teorema de la lógica matemática moderna que ha estremecido el pensamiento del siglo XX : el de**Kurt Gödel**.

El libro tiene la forma de una interacción entre varias narrativas. Los capítulos principales se alternan con diálogos entre los personajes imaginarios, inspirados por la narración de [Lewis Carroll](https://es.wikipedia.org/wiki/Lewis_Carroll) [*Lo que le dijo la tortuga a Aquiles*](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Lo_que_le_dijo_la_tortuga_a_Aquiles&action=edit&redlink=1), que aparece en el libro. En éste, [Aquiles](https://es.wikipedia.org/wiki/Aquiles) y la tortuga discuten una paradoja relativa a los [modus ponens](https://es.wikipedia.org/wiki/Modus_ponendo_ponens). Hofstadter basa los otros diálogos en éste, y presenta al [cangrejo](https://es.wikipedia.org/wiki/Cangrejo) y a un [genio](https://es.wikipedia.org/wiki/Genio), entre otros. Estas narrativas se sumergen con frecuencia en la [autorreferencia](https://es.wikipedia.org/wiki/Autorreferencia) y la [metaficción](https://es.wikipedia.org/wiki/Metaficci%C3%B3n).

Los [juegos de palabras](https://es.wikipedia.org/wiki/Juegos_de_palabras) caracterizan prominentemente la obra. Algunos [retruécanos](https://es.wikipedia.org/wiki/Retru%C3%A9cano) pueden ser absolutamente atroces, pero perdonables por la amplitud de la conexión que hacen con las ideas: "el MagnifiCrab, de hecho" (el *[Magnificat en Re](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Magnificat_(Bach)&action=edit&redlink=1" \o "Magnificat (Bach) (aún no redactado))*, de [Bach](https://es.wikipedia.org/wiki/Bach)), "[SHRDLU](https://es.wikipedia.org/wiki/SHRDLU), juguete del diseño humano" ([inglés](https://es.wikipedia.org/wiki/Idioma_ingl%C3%A9s): *Toy of Man's Designing*, alude al [coral](https://es.wikipedia.org/wiki/Coral_(m%C3%BAsica)), de [Bach](https://es.wikipedia.org/wiki/Bach) *Jesu, Joy of Man's Desiring* - [Jesús](https://es.wikipedia.org/wiki/Jes%C3%BAs), alegría del anhelo humano) y a la "[teoría de los números tipográfica](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teor%C3%ADa_de_los_n%C3%BAmeros_tipogr%C3%A1fica&action=edit&redlink=1)", que inevitablemente reacciona explosivamente cuando procura hacer declaraciones sobre sí mismo, como el [TNT](https://es.wikipedia.org/wiki/Gram%C3%A1tica_(aut%C3%B3mata)).

TNT es una ilustración del [teorema de la incompletitud de Gödel](https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_la_incompletitud_de_G%C3%B6del), y en el libro se presentan otras analogías al respecto; por ejemplo, un [fonógrafo](https://es.wikipedia.org/wiki/Fon%C3%B3grafo) que se destruye tocando una grabación titulada "No puedo ser tocada en el reproductor X". Éste es un ejemplo de un [bucle extraño](https://es.wikipedia.org/wiki/Bucle_extra%C3%B1o), un término acuñado por Hofstadter para describir las cosas que hablan sobre sí mismas o que se refieren nuevamente a sí mismas, como por ejemplo la [litografía](https://es.wikipedia.org/wiki/Litograf%C3%ADa) de Escher [*Dos manos que se dibujan*](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Drawing_Hands&action=edit&redlink=1) (véase [algoritmo recursivo](https://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_recursivo) y [autorreferencia](https://es.wikipedia.org/wiki/Autorreferencia)).

Hofstadter lleva a los lectores a lo largo de muchos tipos de rutas para escapar de estas contradicciones [lógicas](https://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%B3gica). En última instancia, los cuentos de los maestros [zen](https://es.wikipedia.org/wiki/Zen) despiertan en nuestras mentes con los [koans](https://es.wikipedia.org/wiki/Koan" \o "Koan) que nos fuerzan a pensar fuera de la caja y abrazar esas paradojas con MU.

Hay otras historias coloridas sobre "SHRDLU, la estructura alternativa de la unión", acerca de uno mismo engullendo pantallas de [televisión](https://es.wikipedia.org/wiki/Televisi%C3%B3n), y la forma musical del [canon](https://es.wikipedia.org/wiki/Canon_(m%C3%BAsica)). Habla también acerca de las [paradojas de Zenón](https://es.wikipedia.org/wiki/Paradojas_de_Zen%C3%B3n) y de las colonias de [hormigas](https://es.wikipedia.org/wiki/Hormigas) sabias. Una pregunta clave en el libro es: "¿Cuándo son iguales dos cosas?" Otra paradoja, la [ley auto-referencial de Hofstadter](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Ley_auto-referencial_de_Hofstadter&action=edit&redlink=1), la hizo al modo de la cultura [geek](https://es.wikipedia.org/wiki/Geek):

Las *call stacks* ("llamada de pila/rutina") también se abordan en el libro mientras un diálogo describe las aventuras de [Aquiles](https://es.wikipedia.org/wiki/Aquiles) y la tortuga cuando hacen uso de tónicos "que empujan" y "que hacen estallar". Incorporar una ilustración a un libro contaría como "empujando", incorporar una ilustración a un libro dentro de una ilustración en un libro habría causado un doble "empujar", y "que hacen estallar" se refiere a salir de nuevo al nivel anterior de la realidad. La tortuga comenta, con humor, que un amigo suyo usó el "hacer estallar" mientras estaba en su estado actual de realidad y desde entonces no se oyó más de él. (¿Acaso su amigo dejó simplemente de existir, o habrá alcanzado un nivel más alto de realidad, es decir, el mismo nivel de realidad en el cual los lectores de *GEB* residen actualmente?) Las secciones siguientes analizan los principios básicos de la lógica, las declaraciones auto-referenciales (*typeless*), los [sistemas](https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema) e incluso la [programación](https://es.wikipedia.org/wiki/Programaci%C3%B3n).

Un diálogo particularmente significativo en el libro aparece ingeniosamente escrito en forma de [canon retrógrado](https://es.wikipedia.org/wiki/Canon_(m%C3%BAsica)#Canon_retr.C3.B3grado_o_cancrizante_.28Canon_cancricans.29), en el cual cada línea antes del punto medio corresponde a una línea idéntica pasado el punto medio, si bien la conversación da una sensación extraña, debido al uso de frases comunes que pueden usarse como saludos o como despedidas ("Buen día") y la colocación de las líneas que, bajo cercana inspección, dobla como una respuesta a una pregunta en la línea siguiente.

Un [rompecabezas](https://es.wikipedia.org/wiki/Rompecabezas) muy enervante (en el diálogo *Aria con diversas variaciones*) es una especulación referente a un autor que escribe un libro y elige terminar el libro sin interrumpir realmente el texto, como es habitual. Un autor no puede hacer una conclusión repentina (esto es, considerando la [trama](https://es.wikipedia.org/wiki/Trama)) como una sorpresa, cuando el hecho físico de que hacen falta solamente unas páginas para terminar el libro es obvio para el lector; así que el autor concluye el tema principal, y entonces continúa escribiendo, pero se dejan pistas al lector de que el final ya pasó, tales como una prosa vaga y desenfocada, oraciones erróneas o contradicciones. Entonces, al leer las últimas partes pasadas de ese mismo diálogo - o, algunos dirían, *GEB* en su totalidad como un juego de la forma y de la función - las singularidades pueden notarse. Además, pocos lectores han notado que el libro comienza con una señal al "autor", seguramente una broma sobre la idea de que el libro entero es realmente un largo [monólogo](https://es.wikipedia.org/wiki/Mon%C3%B3logo) de Hofstadter.

En la Ofrenda *Musical* , Bach incluye una inscripción cuyas primeras letras se combinan para deletrear "RICERCAR", y la palabra italiana que significa "buscar".

La Ofrenda tiene una fuga de tres partes, una fuga de seis partes, diez cánones y una sonata trío.

**Cánones:** en un canon, un solo tema se juega contra sí mismo. Al igual que Row Row Row Your Boat. En el canon básico, entra la primera voz, y después de un período, la segunda voz entra al mismo comienzo que la primera, superponiéndose una sobre la otra. También hay cánones más complicados, donde la segunda voz también puede entrar en un tono diferente.

**Fuga:**  una fuga es como un canon, ya que se basa en un tema que se reproduce en diferentes voces, pero la notación es mucho menos rígida y puedes jugar con ella más.

Bach creó un "canon que crece sin cesar", en el que termina e inmediatamente se reinicia, pero aparece una nota. La transición es perfecta y le permite continuar aumentando para siempre. **Este es el primer ejemplo en el libro de un "Strange Loop",**  un bucle por el que al movernos inesperadamente nos encontramos de vuelta a donde comenzamos. Tal como en las famosas pinturas de Escher como la escalera infinita.

**Paradoja de Epiménides:**  Otra forma de ciclo extraño, contenida en declaraciones como "Esta declaración es falsa". Es un "ciclo extraño de un paso".

Incompletez de Godel:

* El teorema de incompletitud de Godel trata con bucles extraños, afirmando que cualquier intento de una teoría de números para definirse fallará. "Todas las formulaciones axiomáticas consistentes de la teoría de números incluyen proposiciones indecidibles".
* La oración G de Godel podría escribirse mejor como "Esta declaración de teoría de números no tiene ninguna prueba en el sistema de  *Principia Mathematica* ".
* La verdadera conclusión es que el sistema está incompleto, hay afirmaciones verdaderas que sus métodos de prueba son demasiado débiles para demostrar.

**La paradoja de Russell: la** mayoría de los conjuntos no son miembros de sí mismos. Por ejemplo, el conjunto de todas las morsas no es en sí mismo una morsa. O bien, se tragan a sí mismos, como el conjunto de todas las cosas que no son Juana de Arco. Por lo tanto, los conjuntos se ejecutan en la fábrica o se tragan a sí mismos, pero podemos definir un conjunto como El conjunto de todos los conjuntos de la ejecución del molino, que no debe ser ni deglutir ni ejecutar en la fábrica. **El culpable de estas paradojas es la auto referencia, o la extraña locura**. Tal como en el par de declaraciones "La siguiente oración es falsa". "La oración anterior es verdadera".

Para deshacerse de bucles extraños, debes deshacerte de la auto referencia. Pero un sistema completo requiere auto referencia, por lo tanto, bucles extraños.

**I: El rompecabezas de Mu**

**Requisito de formalidad**: no debe hacer nada fuera de las reglas del sistema.

En los sistemas formales, los teoremas se producen simplemente de acuerdo con ciertas reglas del sistema. Estas se llaman las "reglas de producción". Un teorema "libre" que sabemos que es cierto es un "axioma" del sistema. Una "derivación" es una explicación explícita, línea por línea, de cómo llegar a un teorema de acuerdo con las reglas formales del sistema.

Una gran diferencia entre máquinas y humanos es que es **posible programar una máquina para realizar una tarea de rutina, sin notar un orden superior de lo que está haciendo.** Los humanos siempre reconocerán estos patrones cuando sean lo suficientemente obvios. Un automóvil nunca captará la idea de que se supone que debe evitar otros automóviles.

**Saltar del sistema:**  una propiedad de la inteligencia es que puede "saltar" del sistema en el que se encuentra, como al notar que repite el número "1" cada vez que presiona la calculadora. Todos percibimos sistemas en diferentes niveles, y podemos tratar de convencer a otros de que están operando dentro de sistemas a los que son ciegos pero que observamos. (Juegos finitos / infinitos)

Es necesario distinguir **entre operar dentro del sistema y hacer observaciones o declaraciones sobre el sistema**. Este es el modo M (modo mecánico) y el modo I (modo inteligente).

**II: Significado y forma en matemáticas**

Problema filosófico: ¿las palabras y el lenguaje siguen reglas formales o no?

**Isomorfismo:**  una transformación que preserva la información. Se aplica cuando dos estructuras complejas se pueden mapear entre sí, de tal manera que a cada parte de una estructura hay una parte correspondiente en la otra estructura correspondiente, donde las dos partes juegan roles similares en sus respectivas estructuras.

La percepción de un isomorfismo entre dos estructuras conocidas es un avance en el conocimiento y la fuente de crear significados en las mentes de las personas.

**III: Figura y tierra**

Los artistas distinguen entre "figura y fondo". Por lo general, la figura es el foco, pero a veces habrá más significado oculto en el fondo.

"Existen sistemas formales cuyo espacio negativo (conjunto de no teoremas) no es el espacio positivo (conjunto de teoremas) de ningún sistema formal".

***Contracrostipunctus*;** En este diálogo, están discutiendo el récord de la tortuga que rompió el tocadiscos de Cangrejo al reproducir un sonido que lo desmontó.

El elemento inteligente aquí es cómo hay un significado "por encima" de las discusiones. Las primeras letras de las diferentes líneas en el diálogo deletrean una oración que es en sí misma autorreferencial.

**IV: consistencia, integridad y geometría**

Hay más en el significado que lo que es obvio. Las personas atribuyen un significado inherente a las palabras, cuando su contexto es tan importante. O podría atribuir "sonido" como un elemento necesario de una colisión entre dos objetos, pero no habría sonido si chocaran en el vacío. El ruido requiere un cierto medio.

En el diálogo, la Tortuga dice que no puede haber un tocadiscos lo suficientemente fuerte como para resistir la capacidad de cualquier registro de vibrar a la velocidad que lo destruirá.

**Consistencia:**  cuando cada teorema, después de la interpretación, sale verdadero (en algún mundo imaginable).

**Completitud:**  cuando todas las afirmaciones que son verdaderas (en algún mundo imaginable), y que pueden expresarse como cadenas bien formadas del sistema, son teoremas.

1. CONCLUSIONES

Todo lenguaje, todo sistema formal, todo programa de ordenador, todo proceso de pensamiento, llegan, tarde o temprano, a la situación límite de la autorreferencia: de querer expresarse sobre sí mismos. Surge entonces la emoción del infinito, como dos espejos enfrentados y obligados a reflejarse mutua e indefinidamente.

REFERENCIAS

<https://estudiarfisica.com/2018/10/20/godel-escher-bach-un-eterno-y-gracil-bucle-douglas-hofstadter/>